корнями функции f_1 найдется ровно один корень функции f_2, и наоборот. Отсюда в силу непрерывности обеих этих функций получим, что их графики пересекаются ровно в одной точке на каждом интервале между любыми двумя соседними корнями функции $J_\nu(t)$ (а также, между любыми двумя соседними корнями функции $J_{-\nu}(t)$).

Это означает, что уравнение (4) имеет счетное множество положительных корней. А зная нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$, можем отделить промежутки, на которых находятся корни уравнения (4).

2) Пусть $t = iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}_+$. Рассуждая аналогично, получим, что уравнение $I_\nu(iy)/J_\nu(iy) = -I_{-\nu}(iy)/J_{-\nu(iy)}$ имеет счетное множество чисто мнимых нулей.

Замечание. Остается не выясненным вопрос, имеет ли уравнение (3) другие комплексные корни, отличные от найденных чисто мнимых.

Можно убедиться в справедливости аналогичного утверждения для уравнения

$$J_\nu(t)I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)J_{-\nu}(t) = 0, \ \ 0 < \nu < 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-41-020516).

Литература

1. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.* – М.: Наука, 1977. – 344 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1974. – 296 с.

3. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.

4. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения.* – М.: ИЛ., 1962. – 352 с.

ON ZEROS OF COMBINATIONS OF PRODUCTS OF CYLINDRICAL FUNCTIONS

A.A. Gimaltdinova

Zeros of a function that is the sum of products of Bessel functions with opposite indices are investigated.
Keywords: the Bessel function, the modified Bessel function, the set of zeros of the function.

УДК 517.9

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППАРАТА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Ю.А. Гладышев[1], В.В. Калманович[2]

1 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского
2 —; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского

В статье показано, что метод обобщенных степеней, предложенный Берсом и распространенный на операторы степени выше первой, позволяет свести решение уравнений второго и более высокого порядков к построению решений дифференциальных *уравнений первого порядка. Даны примеры использования метода для нахождения решений уравнений разных типов. При этом показано полное совпадение результатов с ранее известными. Указаны возможные пути обобщения метода на уравнения с большим числом независимых переменных.*

Ключевые слова: обобщенные степени, обобщенная константа, дифференциальные уравнения, уравнение Лапласа.

Понятие обобщенной степени было введено Берсом [1] при распространении методов теории функций комплексного переменного на системы уравнений типа Коши-Римана с переменными коэффициентами. Обобщенная степень Берса $X^{(n)}C$ была определена как функция, построенная путем последовательного применения интегрального оператора I

$$X^{(n)}C = n!I^nC,\ X^{(0)}C = C,$$

который является правым обратным для заданного дифференциального оператора D,

$$DI = 1,$$

к функции C, взятой из ядра оператора D в заданном линейном пространстве L:

$$DC = 0.$$

Изучая свойства линейных комбинаций обобщенных степеней, Берс ввел принцип соответствия, когда сходящемуся ряду в обычных переменных сопоставляется ряд обобщенных степеней с теми же коэффициентами. На основе принципа соответствия были введены символы $\sin mX(x, x_0)$, $\cos mX(x, x_0)$, удовлетворяющие относительно D правилам, формально аналогичным обычным правилам дифференцирования. Понятие принципа соответствия в несколько другом понимании под названием “метод подстановки” (replacement) было использовано Проттером [2] для построения обобщенных сферических гармоник. В этих исследованиях оператор D оставался оператором первого порядка с заданными переменными коэффициентами.

В настоящем сообщении предпринята попытка взять в качестве D оператор более высокого, чем первого, порядка. Поскольку оба метода ведут к однозначному результату при задании дополнительных вполне выполнимых требований, то в сообщении введено понятие оператора соответствия B_x, который аналитически заданному в виде ряда соотношению $f(x)$ в обычных переменных сопоставляет линейное соотношение между обобщенными степенями

$$B_x(x, 0; n)f = F(x).$$

Здесь функция $F(x)$ получена после подстановки обобщенной степени через обычные переменные. В скобках при B_x указывается вся необходимая дополнительная информация, например, порядок n оператора D, пределы интегрирования при нахождении обобщенной степени и т.д.

В данной работе рассмотрен случай операторов D порядка выше первого. Впервые этот вопрос поднимался в монографии [3], где было дано обобщение понятия обобщенной степени для операторов более высокого порядка. Представляет интерес в качестве D выбрать оператор ρ-кратной производной

$$D = \frac{d^{\rho}}{dx^{\rho}}. \tag{1}$$

В этом случае обобщенная константа имеет вид многочлена

$$C = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{\rho-1} x^{\rho-1},$$

а интегральный оператор I достаточно прост, так что обобщенная степень имеет вид

$$X^{(n)}(x,0) = n!\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}C_0 + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}C_1 + \ldots + (\rho-1)!\frac{x^{2n+\rho-1}}{(2n+\rho-1)!}C_{\rho-1}\right).$$

Например, если $\rho = 2$, то имеем

$$D = \frac{d^2}{dx^2},\ X^{(n)}(x,0) = n!\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}C_0 + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}C_1\right).$$

Возьмем в качестве исходной функции $f(x) = Ce^{kx}$, которая дает решение простейшего уравнения $\frac{df}{dx} = kf$. Перейдем к обобщенной степени, получим функцию

$$F(x) = c_1 \mathrm{ch}\sqrt{k}x + c_2 \mathrm{sh}\sqrt{k}x,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = kF.$$

Очевидно, что появление двух, вообще говоря, новых произвольных констант вполне естественно и необходимо, так как уравнение для $F(x)$ второго порядка.

Покажем действие оператора $B_x(x,0;2)$. В качестве исходной функции возьмем решение

$$f(x,t) = (x-t)^n c \tag{2}$$

уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Применим оператор соответствия $B_x(x,0;2)$ к (2), имеем

$$B_x(x,0;2) f(x,t) = (X-t)^n C = \sum_{i=0}^{n} C_n^i X^{(n-i)}(x,0)\, t^i.$$

Выражение $(X-t)^n C$ после подстановки обобщенной степени может быть выражено через полиномы Эрмита

$$F(x) = (X-t)^n C = \frac{n!}{(2n)!} H_{2n}(\xi) C_0 + \frac{n!}{(2n+1)!} H_{2n+1}(\xi) C_1,$$

$$x = 2\sqrt{t},$$

и дает решение уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Если уравнение взять с другим знаком при производной по t

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

то имеем решение

$$f = \frac{1}{\sqrt{x+t}}, \tag{4}$$

имеющее особенности на линии $x + t = 0$.

Если $p = 2$, то для $F(x,t)$ имеем уравнение теплопроводности. Проведем разложение (4) в ряд по x

$$(x+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i-1)!!}{(2i)!!} x^i t^{-\frac{i+1}{2}}.$$

Действуя оператором B_x при $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, найдем известное решение уравнения теплопроводности мгновенного источника

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{5}$$

Проведено исследование многочленов решений для более высоких значений $p = 3, 4, 5$.

Обратим внимание на возможность повторного применения оператора B_x. Например, взяв решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

получим решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Для решения (5) найдем

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(2i)!}{(4t)^{2i}} \frac{x^{4i}}{(4i)!} C_1.$$

Можно показать, что подстановка обобщенной степени только улучшает сходимость ряда. Очевидно, что решение уравнения (6) можем получить из (3) непосредственно, взяв оператор $B_x(x, 0; 4)$

Преобразование может быть проведено над двумя различными переменными. Например, рассмотрим уравнение (3) и совершим преобразование над решением

$$f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i x^{n-i} t^i,$$

получим

$$f = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)! \frac{x^{2n-2i}}{(2n-2i)!} i! \frac{t^{2i}}{(2i)!} = n! \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{2n}^{2i} X^{2n-2i} t^{2i}.$$

Это соответствует степени $2n$ при использовании комплексного переменного $z = x + it$.

Особо отметим случай трех переменных. Возьмем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Тогда при переходе к случаю (1) для всех трех переменных имеем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, записав решение (7) и переходя к обобщенным степеням, имеем набор

$$(X_1 + X_2 - 2X_3)^n C, \ldots, (X_2 - X_1)^n C.$$

Здесь обобщенная константа имеет восемь компонент, то есть содержит содержит восемь произвольных постоянных

$$C = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 xy + c_5 yz + c_6 zx + c_7 xyz. \tag{8}$$

Следовательно, все обобщенные степени содержат восемь произвольных констант, входящих в (8).

Можно показать, что полученный набор многочленов совпадает с системой ортогональных гармонических многочленов.

Повторное применение метода обобщенных степеней дает возможность построить решения уравнения четвертого порядка (бигармонического), что представляет интерес для теории упругости.

Литература

1. Bers L., Gelbart A. *On a class of function defined by partial differential quanions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 56. – C. 67–93.

2. Protter H. *Generalized spherical harmonics* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – C. 314–341.

3. Гладышев Ю. А. *Формализм Бельтрами-Берса и его приложение в математической физике*. – Калуга: Изд. КГПУ им. К. Э. Циолковского, 1997. – 259 с.

ON THE USE OF BERS' THEORY OF GENERALIZED POWERS
FOR CONSTRUCTION OF BASIC SOLUTIONS OF EQUATIONS OF HIGHER ORDER

Yu.A. Gladyshev, V.V. Kalmanovich

We show that the method of generalized powers proposed by Bers and extended to operators of degree higher than the first allows us to reduce the solution of equations of the second and higher orders to the construction of solutions of first-order differential equations. Examples of using the method for finding solutions of equations of different types are given. The full coincidence of the results with previously

known ones is shown. Possible ways of generalizing of the method to equations with a large number of independent variables are indicated.
Keywords: generalized powers of Bers, generalized constant, differential equations, Laplace equation.

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ И ЗАДАЧАХ ИЗ ДВОИЧНОГО АНАЛИЗА

Б.И. Голубов[1]

1 *golubov@mail.mipt.ru*; Московский физико-технический институт (государственный университет)

В докладе будет представлен обзор результатов, связанных с двоичным анализом, и сформулированы некоторые задачи.

Ключевые слова: ортонормированные системы, двоичный анализ, ряды Фурье-Уолша, преобразование Уолша.

В 1923 г. Дж. Л. Уолш построил ортонормированную систему функций, получившую название системы Уолша. Функции этой системы являются ступенчатыми на отрезке $[0,1]$ и каждая из них принимает всего два значения, а именно 1 и -1 на промежутках, концы которых являются двоично-рациональными числами. В 1950 г. Дж. Файн определил преобразование Уолша функций, интегрируемых по Лебегу на полуоси $[0,+\infty)$. Ряды Фурье-Уолша и преобразование Уолша нашли широкое применение в различных областях математики, физики и других наук. В настоящее время теория рядов Фурье-Уолша и преобразования Уолша, составляющие основу так называемого двоичного гармонического анализа, получили большое развитие (см. [1], [2] и [3]).

С конца 60-х годов прошлого века начал развиваться так называемый двоичный анализ. Подобно тому, как основу математического анализа составляют дифференцирование и интегрирование, основу двоичного анализа составляет двоичное дифференцирование и интегрирование. Определение точечной двоичной производной впервые появилось в 1967 г. в работе Дж. Е. Гиббса [4]. С тех пор оно обобщалось и изменялось в различных направлениях. Библиография по теории и приложениям двоичных производных и связанных с ними двоичных интегралов в настоящее время содержит более 200 наименований, в том числе две монографии [5], [6]. Итоги развития двоичного анализа подведены в двух недавно вышедших монографиях [7], [8]. Во второй из них сформулированы некоторые нерешенные задачи.

В докладе будут сформулированы некоторые из этих задач.

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.

2. Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 368 p.

3. Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series. An Introduction to dyadic harmonic analysis.* – Budapest: Akademiai Kiado, 1990. – 560 p.